

一种具有随机远程感染机制的复杂网络SIS传播模型¹

吕欣 邓宏钟 李勇 吴俊 谭跃进

(国防科学技术大学信息系统与管理学院, 长沙 410073)

摘要: 提出了一种具有随机远程感染机制的复杂网络 SIS 传播模型: 感染节点以一定概率感染其邻居节点同时, 以一定概率随机感染不存在边连接的陌生节点。分别在均匀网络与非均匀网络上对该模型的传播临界值和稳态密度进行的解析和仿真分析结果表明, 只要感染节点在每个周期内随机感染一个陌生节点, 网络的传播临界值就会消失。研究结论对于基于复杂网络的传播控制, 例如病毒战、心理战等具有重要启示: 在网络信息(病毒、谣言等)的传播过程中, 只需充分利用感染节点信息以及在传播过程中随机选择少量节点进行主动感染, 即可显著增加网络中感染节点的比例, 从而提高网络传播效率。

关键词: 复杂网络, SIS, 传播临界值, 随机远程感染, 网络攻击

中图分类号: N94

MR 分类号: 92D30

文献标志码: A

文章编号:

引言

自从美国康奈尔大学的Watts和Strogatz^[1]提出了著名的小世界网络模型(WS模型)以来, 复杂网络的研究在过去几年得到了迅速发展, 其中复杂网络的传播动力学是研究焦点之一^[2-5]。

经典的SIS模型将人群分为易感染者(Susceptible)和感染者(Infected)^[6], 每个易感染者一旦与感染者发生接触, 将以一定概率被传染疾病, 同时, 每个感染者能以一定概率恢复为易感染者。对该模型的最初讨论是当人群中存在感染者时, 所有易感染者都以一定概率有可能被感染, 即假设所有人之间都存在接触, 这显然是不合理的, 因为一个人不可能跟所有其他人都存在接触。复杂网络上的传播动力学解决了这一问题: 将人群抽象为网络中的节点, 而边代表了人群之间的联系, 只有存在联系的节点(熟人)之间才能相互传染疾病, 而没有联系的节点(陌生人)之间不会传染。

基于如上假定, Romualdo等^[7]通过平均场方法(mean-field theory)最早分析了发生在均匀网络和非均匀网络上的SIS传播过程, 他们的研究表明, 网络规模无限增大时, 对于平均度为 \bar{k} 的均匀网络, 存在一个非零的传播临界值 $\lambda_c = 1/\bar{k}$; 而对于度分布为 $P(k) = (1+\gamma)m^{1+\gamma}k^{-2-\gamma}$ 的无标度网络, 当 $0 < \gamma \leq 1$ (比如BA网络)时, 网络的传播临界值趋于零, 这一结论彻底改变了传统传播模型的临界值理论, 意味着即使是微小的传染源也足以在庞大的网络中蔓延。Romualdo和Marián等进一步研究了有限规模无标度网络^[8]和关联网络(correlated network)^[9]的传播临界值。Liu等^[10]研究了一种具有家庭结构的复杂网络疾病传播过程, 将度分布为 $P(k)$ 的复杂网络上的每个节点看作一个“家庭”, 每个家庭具有相同数量的“成员”, 研究发现, 在区分内部和外部感染时, 如果每个家庭个体的痊愈速率比家庭内部感染速率要快, 那么每个家庭内部都没有疾病流行, 但在整个无标度网络中疾病仍然会传播开来。

然而, 实际生活中熟人(有边连接)和陌生人(无边连接)的划分不是确定的, 陌生人之间经常因为某些原因相互接触(比如在公共场合), 从而变为熟人, 即网络的拓扑结构并非一经确定不再改变的。针对这一实际情况, 我们提出了一种考虑陌生人可能与感染节点发生接触的SIS传播模型。改进的模型基于如下随机远程感染机制: 感染节点在将疾病以一定概率传染给未被感染的邻居节点的同时, 对不存在边连接的陌生节点以一定概率接触并感染。

本文的组织结构如下: 第1节和第2节应用平均场理论分别对改进模型下均匀网络和无标度网络上的传播过程进行了解析讨论, 第3节应用改进模型对WS小世界网络和BA无标度网络进行了仿真分析, 第4节总结了文章的研究结论并对进一步的研究作出了展望。

¹基金项目: 国家自然科学基金(No. 70501032, 70771111)

作者简介: 吕欣(1984-), 湖南常德人, 博士研究生, 主要研究方向为复杂网络理论及应用。

E-mail: lvxin_nudt@yahoo.com.cn

1 均匀网络

为了应用平均场理论 (mean-field theory) 对改进SIS模型进行解析研究, 首先对均匀网络 (如ER随机图和WS小世界网络) 给出如下三条假设^[11]:

①均匀性 (homogeneity) 假设: 均匀网络 (如 ER 随机图和 WS 小世界网络) 的度分布在网络平均度 \bar{k} 处有个尖峰, 而当 $k \ll \bar{k}$ 和 $k \gg \bar{k}$ 时指数下降。因而假设网络中每个节点的度 k_i 都近似等于 \bar{k} 。

②均匀混合 (homogenous mixing) 假设: 感染强度与感染个体的密度 $\rho(t)$ 成比例。它的一个等价假设是 ν 和 δ 都是常数。

③假设疾病发生的时间尺度远小于个体的生命周期, 从而不考虑个体的出生和自然死亡。

于是发生在网络上的具有随机远程感染机制的 SIS 传播过程可以作如下描述:

设网络规模 $N \rightarrow \infty$, 给定网络初始感染节点比例 $\rho(0)$, 在每个时间步, 任意处于易染状态的节点若存在感染的邻居节点, 将以概率 ν 被感染, 每个感染节点将以接触概率 ε 接触陌生 (不相连) 节点, 并以概率 ω (称为陌生节点感染率) 将其感染, 同时, 感染节点以概率 δ 恢复到易染状态。整个过程如图 1 所示。

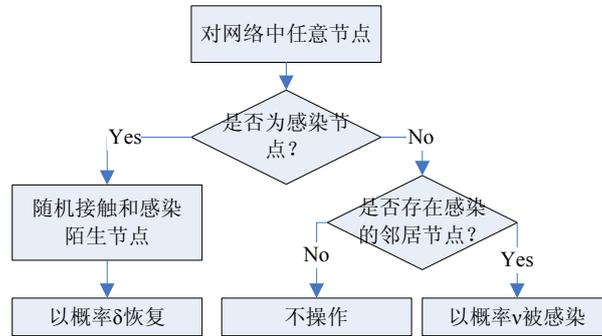


图 1 具有随机感染陌生节点特征的 SIS 传播过程

为了解析讨论方便, 在随机感染陌生节点过程中, 假定每个感染节点在网络中以概率 ω 随机感染一个陌生节点, 这相当于取陌生节点接触概率 $\varepsilon = 1/N$ 。

定义有效传播率 $\lambda = \nu/\delta$ (不失一般性, 可令 $\delta = 1$), 时刻 t 网络中被感染节点密度为 $\rho(t)$ ($\rho(t) \ll 1$), 当 t 趋于无穷大时, 被感染个体的稳态密度记为 ρ , 那么有:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\rho(t) + \lambda \bar{k} \rho(t)[1 - \rho(t)] + \rho(t)\omega \quad (1)$$

为了求得被感染节点的稳态密度, 令式 (1) 右端等于零, 可解得

$$\rho = \begin{cases} 0 & \lambda < \lambda_c \\ \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda} & \lambda \geq \lambda_c \end{cases} \quad (2)$$

其中, 传播临界值 (epidemic threshold) 为

$$\lambda_c = \frac{1 - \omega}{\bar{k}} \quad (3)$$

可见, 在随机感染策略下, 均匀网络的传播临界值将减少 ω/\bar{k} , 而且, 当 $\omega \rightarrow 1$ 时, $\lambda_c \rightarrow 0$, 这说明, 当感染节点均随机选择网络中一个节点进行感染时, 均匀网络的传播临界值也趋于 0; 当 $\omega = 0$ 时, 对应于传统 SIS 模型的情况, $\lambda_c = 1/\bar{k}$ 。

当 $\lambda \geq \lambda_c$ 时, 对于 $\omega \in (0, 1)$, 有 $\rho = \frac{\lambda - 1/\bar{k}}{\lambda} + \frac{\omega}{\lambda \bar{k}}$, 可见, 在相同的传播效率 λ 下, 陌生节点感染

率为 ω 的均匀网络感染节点稳态密度比传统 SIS 模型高 $\frac{\omega}{\lambda \bar{k}}$ 。

2 无标度网络

下面考察无标度网络的传播临界值。

定义相对密度 $\rho_k(t)$ 是一个度为 k 的节点被感染的概率 ($\rho_k(t) \ll 1$)，其稳态值为 ρ_k ，整个网络的感染节点密度为 $\rho(t)$ ，稳态值为 ρ 。用 $P(k)$ 表示网络中节点度为 k 的概率， $\Theta(\rho_k(t))$ 表示任意一条给定的边与一个被感染节点相连的概率，那么根据均场理论，有：

$$\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = -\rho_k(t) + \lambda k [1 - \rho_k(t)] \Theta(\rho_k(t)) + \rho(t) P(k) \omega \quad (4)$$

那么，网络在平衡状态时

$$-\rho_k + \lambda k [1 - \rho_k] \Theta + \rho P(k) \omega = 0 \quad (5)$$

进而有

$$\rho_k = 1 - \frac{1 - \rho P(k) \omega}{1 + \lambda k \Theta} \quad (6)$$

而

$$\rho = \sum_j P(j) \rho_j \quad (7)$$

$$\Theta = \frac{1}{k} \sum_j j P(j) \rho_j \quad (8)$$

于是

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{k} \sum_j \{j P(j) [1 - \frac{1 - \rho P(j) \omega}{1 + \lambda j \Theta}]\} = \frac{1}{k} \sum_j j P(j) - \frac{1}{k} \sum_j j P(j) \frac{1 - \rho P(j) \omega}{1 + \lambda j \Theta} \\ &= 1 - \frac{1}{k} \sum_j j P(j) \frac{1 - \rho P(j) \omega}{1 + \lambda j \Theta} \end{aligned} \quad (9)$$

当网络规模趋于无穷大时，可以将网络中节点的度 j 当作连续变量，式 (7) 和 (9) 分别表示为

$$\rho = \int_m^\infty P(j) \rho_j dj \quad (10)$$

$$\Theta = 1 - \frac{1}{k} \int_m^\infty j P(j) \frac{1 - \rho P(j) \omega}{1 + \lambda j \Theta} dj \quad (11)$$

至此，给定无标度网络的度分布概率密度函数 $P(j)$ 、有效传播效率 λ 和陌生节点感染率 ω ，即可求得 Θ 的值，进而根据式 (6) 和式 (10) 联立得到网络中感染节点的稳态密度。

实际上，在传统SIS模型下，有： $\rho_k = 1 - \frac{1}{1 + \lambda k \Theta}$ ，比较 (6)，可见改进传染方式下 ρ_k 值亦得到了提高，显然，由Romualdo等^[7]的研究结论可知，对于度分布为 $P(k) = (1 + \gamma) m^{1+\gamma} k^{-2-\gamma}$ 的无标度网络，当 $0 < \gamma \leq 1$ （比如BA网络），网络规模无限增大时，网络的传播临界值亦趋于零。

3 仿真分析

第2节讨论了当网络规模无限大，感染密度 $\rho \ll 1$ 时均匀网络和无标度网络 SIS 传播过程的一些解析结果。然而对于不满足上述前提的有限规模复杂网络，感染节点的稳态密度与有效传播率、陌生节点感染率的关系是难以预测的。另外，无标度网络中稳态密度的解析推导过于复杂，这促使我们采用仿真的方法来观察具有随机远程感染机制的 SIS 传播过程。

仿真分析分别以WS小世界网络^[11]和BA网络^[12]作为均匀网络和无标度网络的代表。WS小世界网络按照Barrat等^[13]描述的算法生成：给定一个总节点数为 N 的规则网络，其中每个节点与他相邻的 $K = 2k$ 个节点相连，然后对每个节点与其顺时针方向邻居连接的边，以概率 p 重新连接到网络中的其他节点。在边的重连过程中不考虑自身到自身的连接和重复连接。类似于Romualdo^[7]的做法，这里我们取 $p = 1$ 。BA网络的生成开始于给定的 m_0 个任意连接（本文取完全连接）的初始节点，然后在每个时间步重复增加一个新节点和 m 条新连线 ($m \leq m_0$)，新节点按照择优概率 $\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$ 选择旧节点 i 与之连线，其中 k_i 是旧节点 i 的度。当迭代步数足够多时，就得到一个平均度为 $\bar{k} = 2m$ ，度分布服从 $P(k) \sim k^{-3}$ 的无标度网络。

下面的仿真均取网络节点数 $N = 10000$ ，WS 网络中 $\bar{k} = K = 2 \times 3 = 6$ ，BA 网络中 $m_0 = m = 3$ ，每个仿真均进行 10 次以上，对得到的数据取平均值。

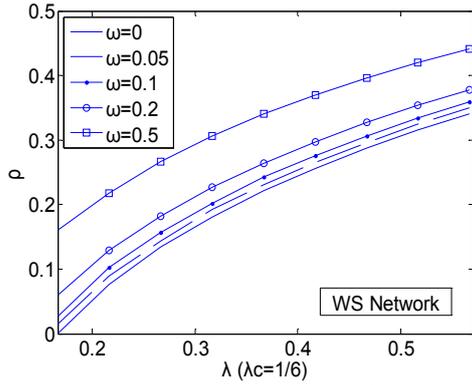


图 2 WS 小世界网络稳态感染密度和传播效率的关系

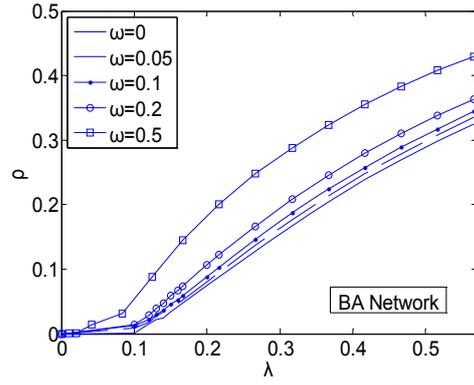


图 3 BA 无标度网络稳态感染密度和传播效率的关系

图 2 和图 3 是在每次仿真给定陌生节点感染率 ω 的情况下，随着有效传播效率的变化，两种网络稳态密度的变化结果。每个图均给出了 ω 分别为 0、0.05、0.1、0.2、0.5 时的结果，注意到 $\omega=0$ 时相当于没有陌生节点感染的传统 SIS 模型。观察图 1 中 $\lambda = \lambda_c = 1/6$ 时的 ρ 值即可发现，在平均度为 6 的 WS 网络中，传统 SIS 模型的网络稳态密度在传播临界值 $1/6$ 处等于 0，而具有一定陌生节点感染率的改进 SIS 模型其网络稳态密度均大于 0，意即改进 SIS 模型的传播临界值要小于传统 SIS 模型，这证实了第 1 节的解析分析结果。同样，如第 2 节所述，图 3 仿真结果显示，在非均匀的 BA 无标度网络中，不存在非零的传播临界值。两幅图均显示随着陌生节点感染率 ω 的增大，网络稳态感染密度逐步增加。

为了更清楚地描述 ω 对网络稳态感染密度的影响，我们对 $\omega=1$ 的极端情况进行了仿真，结果如图 4 所示。

根据式 (4)，在均匀网络中，当 $\omega \rightarrow 1$ 时， $\lambda_c \rightarrow 0$ ，图 4 证实了这一结论：无论是均匀的 WS 小世界网络，还是非均匀的 BA 无标度网络，在陌生节点感染率 $\omega=1$ 时，传播临界值都为 0。这一结果说明，当网络节点遵循 $S \rightarrow I \rightarrow S$ 的接触传播模式时，在每个时间步内，只需由每个感染节点在感染邻居节点的同时随机选择（接触）并感染网络中的一个节点（我们的程序中不区分重复感染的情况），疾病就能在网络中持久存在。而且，比较图 4 中 $\omega=0$ 时传统模型的稳态密度值可以发现，改进模型的稳态密度在 $\omega=1$ 时得到了大幅度提高。

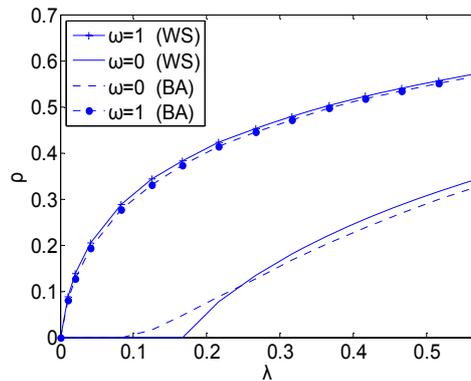


图 4 陌生节点感染率 $\omega=1$ 时 WS 网络和 BA 网络的稳态密度

图 4 显示了另一个有趣的现象：WS 网络和 BA 网络的稳态密度值曲线在 $\omega=1$ 时几乎重合，这一现象似乎显示改进模型的陌生节点长程连接（接触和感染陌生节点）改变了 BA 无标度网络非均匀性对传播的影响，然而这一现象的解释还需要进一步的研究来证实。

图 5 和图 6 展示了随着陌生节点感染率的变化，两种网络稳态密度的变化情况。图中的结果表明 WS 网络与 BA 网络稳态密度随着 ω 的增长而增长的方式并不存在显著的差异，随着陌生节点感染率的提高，两种网络稳态密度的增长方式均呈一定的指数形式：增长幅度逐步增大。而且，从图中还可以看出，由于传播效率的不同，各条曲线显示的稳态密度值存在一定差异，这种差异随着 ω 的增大逐渐变小，说明 ω 值对感染密度产生越来越重要的影响。

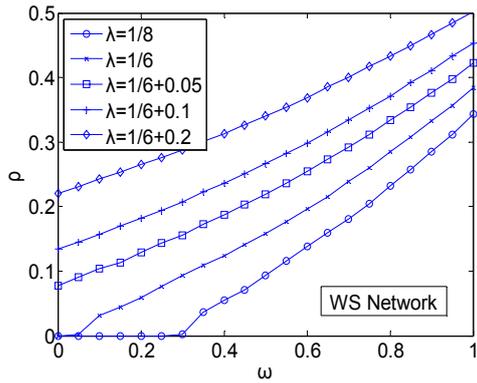


图 5 WS 网络中陌生节点感染率 ω 对稳态密度的影响

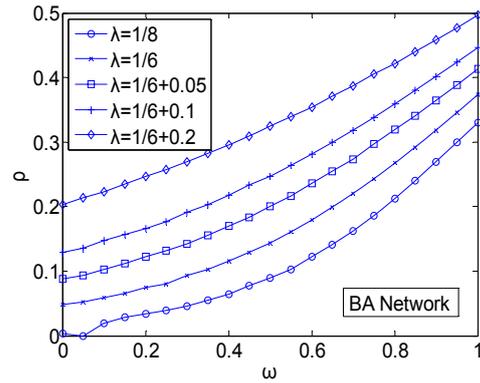


图 6 BA 网络中陌生节点感染率 ω 对稳态密度的影响

4 结论和启示

通过上述解析和仿真分析，我们对带有随机感染陌生节点特点的改进复杂网络 SIS 模型的性质进行了讨论： $\omega = 0$ 时，改进模型即相当于传统模型； $\omega \in (0,1)$ 时，均匀网络的传播临界值 λ_c 比传统模型小 ω/\bar{k} ，而在相同的传播效率 λ 下，改进模型的稳态密度比传统模型高 $\omega/\lambda\bar{k}$ ，对于非均匀的 BA 无标度网络，传播临界值趋于零，仿真分析结果表明其稳态密度同样比传统模型有一定提高（图 3）； $\omega = 1$ 时，无论是均匀的 WS 小世界网络还是非均匀的 BA 无标度网络，其传播临界值都趋于零，稳态密度值均得到大幅度提高，表明在每个时间步内，只需由每个感染节点在感染邻居节点的同时随机选择（接触）并感染网络中的一个节点，疾病就能在网络中持久存在。这一结论对于基于复杂网络的传播控制，例如开展病毒战、心理战等具有重要的启示意义：在网络的传播过程中，只需充分利用已感染节点信息以及在传播过程中随机选择少量节点进行主动感染，即可极大地增加网络中感染节点的比例，从而提高网络传播效率。

为了解析分析的方便，本文讨论的陌生节点接触模式为感染节点从网络中随机选择一个节点，相当于陌生节点接触概率 $\varepsilon = 1/N$ 的情况，进一步的研究可以在陌生节点接触率和感染率满足一定概率分布的条件下，讨论复杂网络的传播临界值和稳态密度。另外，对于改进模型下复杂网络的免疫策略也值得进一步研究。

参考文献

- [1] D. J. Watts, S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393 (6684): 440-442.
- [2] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 86 (4): 3200-3203.
- [3] M. E. J. Newman, S. Forrest, J. Balthrop. Email networks and the spread of computer viruses[J]. Phys. Rev. E, 2002, 66 (3): 035101.
- [4] L. Dall'Asta. Inhomogeneous percolation models for spreading phenomena in random graphs[J]. J. Stat. Mech., 2005: P08011.
- [5] Ying Cheng Lai. Complex networks: Dynamics and security [J]. Pramana-Journal of Physics, 2005, 64 (4): 483-502.
- [6] W O Kermack, A G McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Proc. Roy. Soc., 1932, (A138): 55-83.
- [7] R Pastor-Satorras, A Vespignani. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. PHYSICAL REVIEW E, 2001, 63: 066117.
- [8] R Pastor-Satorras, A Vespignani. Epidemic dynamics in finite size scale-free networks[J]. PHYSICAL REVIEW E, 2002, 65: 035108.
- [9] M. Boguñá, R. Pastor-Satorras. Epidemic spreading in correlated complex networks[J]. Phys. Rev. E, 2002, 66: 047104.
- [10] Jinzhou Liu, Jinshan Wu, Z.R. Yang. The spread of infectious disease on complex networks with household-structure[J]. Physica A, 2004, 341: 273-280.
- [11] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京:清华大学出版社, 2006.4.
- [12] A. -L. Barabási, R. Albert, H. Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks[J]. Physica A 1999, 272: 173-187.

[13] A. Barrat, M. Weigt. On the properties of small world networks[J]. Eur. Phys. J. B 2000, 13: 547-560.

An Improved SIS Model with Random Remote Infection on Complex Networks

LV Xin, DENG Hongzhong, LI Yong, WU Jun, TAN Yuejin

(School of information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha, 410073, China)

ABSTRACT: An improved SIS model with random remote infection on complex networks is proposed. With this model, infected nodes not only infect their neighbor nodes, but also infect remote nodes randomly. The epidemic threshold and proportion of infected nodes are analyzed and simulated on different networks, the analytical results are shown to be in agreement with numerical simulations. It is shown that just with one node randomly chosen and infected by each infected node, the epidemic thresholds of both exponential networks and scale-free networks are vanished and the proportion of infected nodes increases greatly. In complex networks based warfare, such as virus spreading in network attacks, rumors broadcasting in psychological warfare, etc., this paper gives hints that the spreading efficiency and the proportion of infected nodes can be improved greatly with the initiative infecting of randomly selected nodes.

Keywords: Complex networks; SIS; Epidemic threshold; Random remote infection; Network attack

通讯作者联系方式

姓名: 吕欣

电话: 13548663401

通信地址: 湖南长沙国防科技大学信息系统与管理学院 5 队

邮编: 410073

E-mail: lvxin_nudt@yahoo.com.cn